大學入學考試中心
106 學年度指定科目考試試題
數學甲

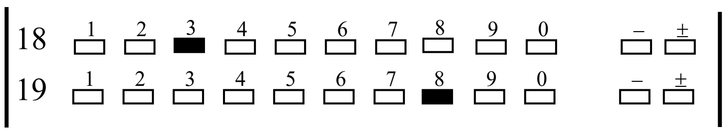
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

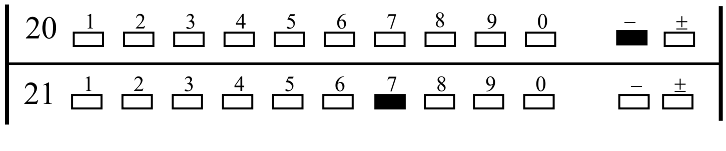
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 從所有二位正整數中隨機選取一個數，設 p 是其十位數字小於個位數字的機率。關於 p 值的範圍，試選出正確的選項。

(1) $0.22 \le p < 0.33$

(2) $0.33 \le p < 0.44$

(3) $0.44 \le p < 0.55$

(4) $0.55 \le p < 0.66$

(5) $0.66 \le p < 0.77$

2. 設 $a=\sqrt[3]{10}$。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。

(1) $25 \le a^5 < 30$

(2) $30 \le a^5 < 35$

(3) $35 \le a^5 < 40$

(4) $40 \le a^5 < 45$

(5) $45 \le a^5 < 50$

3. 試問在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$y = 3\sin x$ 的函數圖形與 $y = 2\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？

(1) 2 個交點

(2) 3 個交點

(3) 4 個交點

(4) 5 個交點

(5) 6 個交點

4. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x = 1$ 有極大值 3，且圖形 $y = f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 之切線方程式為 $y - f(4) + 5(x-4) = 0$，試問 $\int_1^4 f''(x)dx$ 之值為下列哪一選項？

(1) -5

(2) -3

(3) 0

(4) 3

(5) 5

二、多選題（占 24 分）

說明：第5題至第7題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 設 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 為兩非零向量，夾角為120°。若 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 垂直，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{u}$ 的長度是 $\overrightarrow{v}$ 的長度的 2 倍

(2) $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 的夾角為 30°

(3) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 的夾角為銳角

(4) $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 的夾角為銳角

(5) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 的長度大於 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 的長度

6. 已知複數 z 滿足 $z^n+z^{-n}+2=0$，其中 n 為正整數。將 z 用極式表示為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，且 $r>0$。試選出正確的選項。

(1) $r=1$

(2) n 不能是偶數

(3) 對給定的 n，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設

(4) θ 可能是 $\frac{3\pi}{7}$

(5) θ 可能是 $\frac{4\pi}{7}$

7. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。

(1) $f(1)=g(1)$

(2) $f'(1)=g'(1)$

(3) $f''(1)=0$

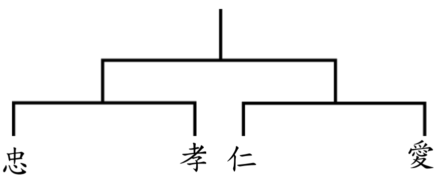
(4) 存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$

(5) 存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$

三、選填題（占 28 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (8–18)。
2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 某高中一年級有忠、孝、仁、愛四班的籃球隊，擬由經抽籤決定的下列賽程進行單淘汰賽（輸一場即被淘汰）：



假設忠班勝過其他任何一班的機率為 $\frac{4}{5}$，孝班勝過其他任何一班的機率為 $\frac{1}{5}$，仁、愛兩班的實力相當，勝負機率各為 $\frac{1}{2}$。若任一場比賽皆須分出勝負，沒有和局。如果冠軍隊可獲得 6000 元獎學金，亞軍隊可獲得 4000 元獎學金，則孝班可獲得獎學金的期望值為 ⑧⑨⑩ 元。

B. 坐標平面上有三條直線 L、L_1、L_2，其中 L 為水平線，L_1、L_2 的斜率分別為 $\frac{3}{4}$、$-\frac{4}{3}$。已知 L 被 L_1、L_2 所截出的線段長為 30，則 L、L_1、L_2 所決定的三角形的面積為 ⑪⑫⑬ 。

C. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\frac{-1}{2n}x+3$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$ ⑭ ⑮ 。

D. 坐標空間中，平面 $ax+by+cz=0$ 與平面 $x=0$、$x+\sqrt{3}y=0$ 的夾角（介於 $0°$ 到 $90°$ 之間）都是 $60°$，且 $a^2+b^2+c^2=12$，則 $(a^2, b^2, c^2)=($ ⑯ , ⑰ , ⑱ $)$。

－－－－－ 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 －－－－－

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。

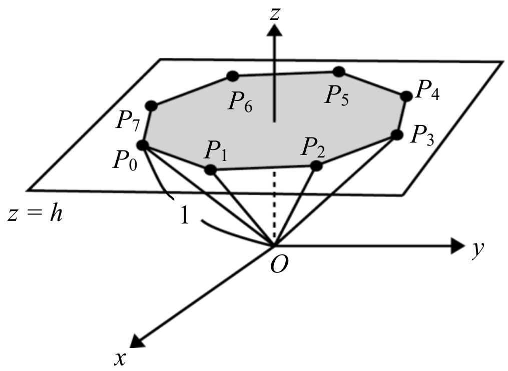
(1) 試求 $\sin(\angle P_1OP_3)$。（4 分）

(2) 試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。（4 分）

(3) 假設 P_1 是圖形 $y=\frac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。（4 分）

背 面 尚 有 試 題

二、坐標空間中，$O(0,0,0)$為原點。平面 $z=h$（其中 $0\le h\le 1$）上有一以 $(0,0,h)$為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取 8 點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段 $\overline{OP_j}$ $(0\le j\le 7)$的長度都是 1。請參見示意圖。



(1) 試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}$。（4 分）

(2) 若 $V(h)$為以 O為頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$為底的正八角錐體積，試將 $V(h)$表為 h的函數（註:角錐體積$=\dfrac{1}{3}$底面積×高）。（2 分）

(3) 在$\overrightarrow{OP_0}$和$\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 90°的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$的最大值為何？（6 分）

106學年度指定科目考試

數學甲考科選擇（填）題答案

<table>
<tr><td colspan="2">題號</td><td colspan="3">答案</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td colspan="3">2,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td colspan="3">1,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td colspan="3">1,2,3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td>8</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B</td><td>11</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td>13</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td>14</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td>15</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">D</td><td>16</td><td>3</td><td rowspan="3">或</td><td>3</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td>18</td><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>

選填題第D題答案說明：

因本題未限制$abc \neq 0$，故（3,1,8）與（3,9,0）均視為正確答案。

106 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

106 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

題目：

一. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。

(1) 試求 $\sin(\angle P_1OP_3)$。（4 分）

(2) 試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。（4 分）

(3) 假設 P_1 是圖形 $y=\dfrac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。（4 分）

參考答案：

(1)

【法一】

$$A=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$ 為旋轉矩陣，其中旋轉角 θ 為銳角，

且 $\cos\theta=\dfrac{4}{5},\sin\theta=\dfrac{3}{5}$。

因此，$\sin\angle P_1OP_3=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$。

【法二】

設$P_1(\alpha,\beta)$，其中$\alpha^2+\beta^2=a^2$。

由$P_2=AP_1$、$P_3=AP_2$可推得

$P_2(\frac{4\alpha-3\beta}{5},\frac{3\alpha+4\beta}{5})$，$P_3(\frac{7\alpha-24\beta}{25},\frac{24\alpha+7\beta}{25})$。

於是可得$\cos\angle P_1OP_3=\frac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_3}}{\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_3}}=\frac{\frac{7}{25}(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{7}{25}$。

因此，$\sin\angle P_1OP_3=\sqrt{1-(\frac{7}{25})^2}=\frac{24}{25}$。

(2)

【法一】

$$\Delta P_1P_2P_3=\Delta OP_1P_2+\Delta OP_2P_3-\Delta OP_1P_3=\frac{1}{2}\cdot a^2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot a^2\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot a^2\sin2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{24}{25}=\frac{3a^2}{25}$$ 。

【法二】

可設$P_1(a,0)$，則$P_2(\frac{4a}{5},\frac{3a}{5}),P_3(\frac{7a}{25},\frac{24a}{25})$。再令$P_2$到$\overline{P_1P_3}$的垂足為$Q$。

因$\Delta P_1P_2P_3$為等腰三角形，且$\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\frac{\sqrt{10}a}{5}$、$\overline{P_1P_3}=\frac{6a}{5}$，

可得$\overline{P_2Q}=\sqrt{\overline{P_1P_2}^2-(\frac{1}{2}\overline{P_1P_3})^2}=\frac{a}{5}$。

因此，$\Delta P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\cdot\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_2Q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6a}{5}\cdot\frac{a}{5}=\frac{3a^2}{25}$。

【法三】

因$\angle OP_1P_2=\angle OP_2P_1=\frac{1}{2}(180^\circ-\theta)$，得$\angle P_1P_2P_3=2\angle OP_2P_1=180^\circ-\theta$。

故$\Delta P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\sin\angle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}a}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}a}{5}\cdot\sin\theta=\frac{a^2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3a^2}{25}$。

【法四】

可設 $P_1(\alpha,\beta)$，其中 $\alpha^2+\beta^2=a^2$，則可推得

$\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{1}{5}(-\alpha-3\beta,3\alpha-\beta)$，$\overrightarrow{P_1P_3}=\frac{1}{25}(-18\alpha-24\beta,24\alpha-18\beta)$。

因此，$\Delta P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{5}(-\alpha-3\beta) & \frac{1}{5}(3\alpha-\beta)\\ \frac{1}{25}(-18\alpha-24\beta) & \frac{1}{25}(24\alpha-18\beta)\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{25}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{3a^2}{25}$。

(3)

【法一】

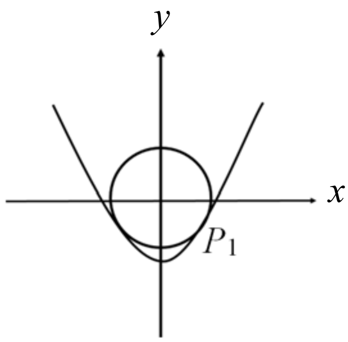
可設拋物線上的點 $P_1(x,\frac{x^2}{10}-10)$，則

$a=\overline{OP_1}=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{10}-10\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4}{100}-x^2+100}=\frac{1}{10}\sqrt{x^4-100x^2+10000}$

$=\frac{1}{10}\sqrt{(x^2-50)^2+7500}\quad\geq\sqrt{75}$。(等號於 $x=\pm5\sqrt{2}$ 時成立)

因此，所求面積 $\Delta P_1P_2P_3$ 的最小值為 $\frac{3a^2}{25}=\frac{3\times75}{25}=9$。

【法二】



設在點 $P_1(t,\frac{t^2}{10}-10)$ 時，$\Delta P_1P_2P_3$ 面積最小。

由 $y'=\frac{x}{5}$，得知 $\frac{t}{5}\times\frac{\frac{t^2}{10}-10}{t}=-1$，解得 $t=\pm5\sqrt{2}$，

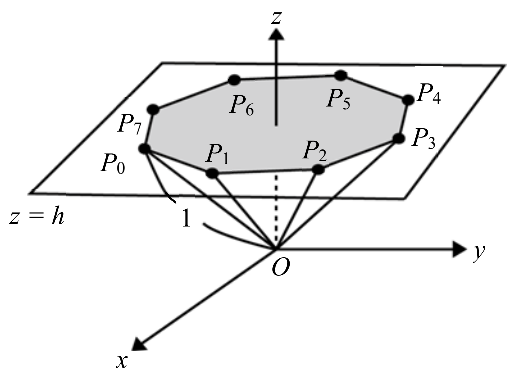
此時 $P_1(5\sqrt{2},-5)$ 或 $(-5\sqrt{2},-5)$，

得知 $a=\overline{OP_1}=\sqrt{50+25}=\sqrt{75}$。

因此，$\Delta P_1P_2P_3$ 面積最小值為 $\frac{3a^2}{25}=\frac{3\times75}{25}=9$。

第二題

二、坐標空間中，$O(0,0,0)$ 為原點。平面 $z=h$（其中 $0\le h\le 1$）上有一以 $(0,0,h)$ 為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取 8 點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段 $\overline{OP_j}$ $(0\le j\le 7)$ 的長度都是 1。請參見示意圖。



(1) 試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0}\bullet\overrightarrow{OP_4}$。（4 分）

(2) 若 $V(h)$ 為以 O 為頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ 為底的正八角錐體積，試將 $V(h)$ 表為 h 的函數（註:角錐體積$=\frac{1}{3}$底面積×高）。（2 分）

(3) 在 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 $\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 $90°$ 的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$ 的最大值為何？（6 分）

參考答案：

(1)

【法一】

設正八邊形的中心為 $A(0,0,h)$ 且 $\theta=\angle AOP_i$（$i=0,1,2,\cdots,7$）。由題意可知：

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP_i}}=h$，而 $\overline{AP_i}=\sin\theta=\sqrt{1-h^2}$（$i=0,1,2,\cdots,7$）。

因此，$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=\overline{OP_0}\cdot\overline{OP_4}\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2h^2-1$。

【法二】

可設 $P_0(\sqrt{1-h^2},0,h), P_4(-\sqrt{1-h^2},0,h)$，則

$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=-(1-h^2)+h^2=2h^2-1$。

【法三】

設正八邊形的中心為 A，得知 $\overrightarrow{AP_0}=-\overrightarrow{AP_4}$，故

$$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_0})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_4})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_0}\cdot\overrightarrow{AP_4}$$

$$=\overline{OA}^2-\overline{AP_0}^2=h^2-(1-h^2)=2h^2-1$$

(2)

正八邊形 $P_0P_1P_2\cdots P_7$ 的面積為 $8\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AP_0}\cdot\overline{AP_1}\cdot\sin\frac{360°}{8}=2\sqrt{2}(1-h^2)$。

因此，正八角錐體積 $V(h)=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}(1-h^2)\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}(h-h^3)$。

(3)

由 $\angle P_0OP_4=2\theta\le 90°$，可推得 $\theta\le 45°$，故 $h=\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$。又 $0\le h\le 1$，因此，

$$1\ge h\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\text{。}$$

由 $V'(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-3h^2)=0$，得知 $h=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 為臨界點(取正)。

$$V'(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-3h^2)\begin{cases}\ge 0 & \text{當 } 0\le h\le\frac{\sqrt{3}}{3}\\ <0 & \text{當 } \frac{\sqrt{3}}{3}<h\le 1\end{cases}\text{。}$$

即函數 $V(h)$ 在 $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ 上遞增，而在 $[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 上遞減。因此，由一階導數判別法，可知：$V(h)$ 在 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 時有相對極大值。

因為 $\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，函數 $V(h)$ 在區間 $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ 上也遞減，故 $V(h)$ 在區間 $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ 上的最大值為 $V(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{8})=\frac{1}{3}$。