

大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試試題（補考）
數學乙

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{-}{8}$	$\frac{+}{8}$
19	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{-}{8}$	$\frac{+}{8}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	$\frac{-}{50}$	$\frac{+}{50}$
21	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{0}{50}$	$\frac{-}{50}$	$\frac{+}{50}$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 便利商店因週年慶而提供折扣優惠，只要消費滿 99 元就可從紙盒中隨機抽一球來決定該筆消費的折扣數（每顆球被抽到的機率相等）。店家已在盒中放了 9 顆球，其中寫著 6 折和 7 折的各有 1 顆、9 折 2 顆、95 折 5 顆。令隨機變數 X 代表消費 100 元的顧客在折扣後需要付的金額（元），若店家想再加入一球使得 X 的期望值等於 86 元，則新加入的那顆球上面所寫的折扣數應為下列哪一個選項？
 - (1) 65 折
 - (2) 75 折
 - (3) 8 折
 - (4) 85 折
 - (5) 9 折

2. 在坐標平面上， O 為原點，考慮直線 $L_1: 5x+3y=5$ 與直線 $L_2: 3x+2y=6-2a$ ，其中 a 為實數。若直線 $L: 2x+y=3$ 分別與直線 L_1 及直線 L_2 交於點 A 及點 B ，則三角形 OAB 的面積為下列哪一個選項？
 - (1) $\frac{1}{2}|a-2|$
 - (2) $|a-2|$
 - (3) $2|a-2|$
 - (4) $3|a-2|$
 - (5) $6|a-2|$

3. 下列矩陣中，試選出矩陣乘法有意義且等式正確的選項。（註：選項中的 $[-1]$ 與 $[-5]$ 皆為一階方陣）

(1) $[1 \ 2][-1] = [-1 \ -2]$

(2) $[-1][1 \ 2] = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}[5 \ 6] = [17 \ 39]$

(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[-1 \ -2] = [-5]$

(5) $[-1 \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 109 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \ -110]$

二、多選題（占 24 分）

說明：第 4 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 坐標平面上，設 a, b 為實數，已知目標函數 $ax+by$ 在平面區域 $\Omega : \begin{cases} 4x+y \leq 16 \\ -2x+3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 上

的最大值為 12，且取得最大值的點不在坐標軸上。試選出正確的選項。

(1) $4a+3b=12$

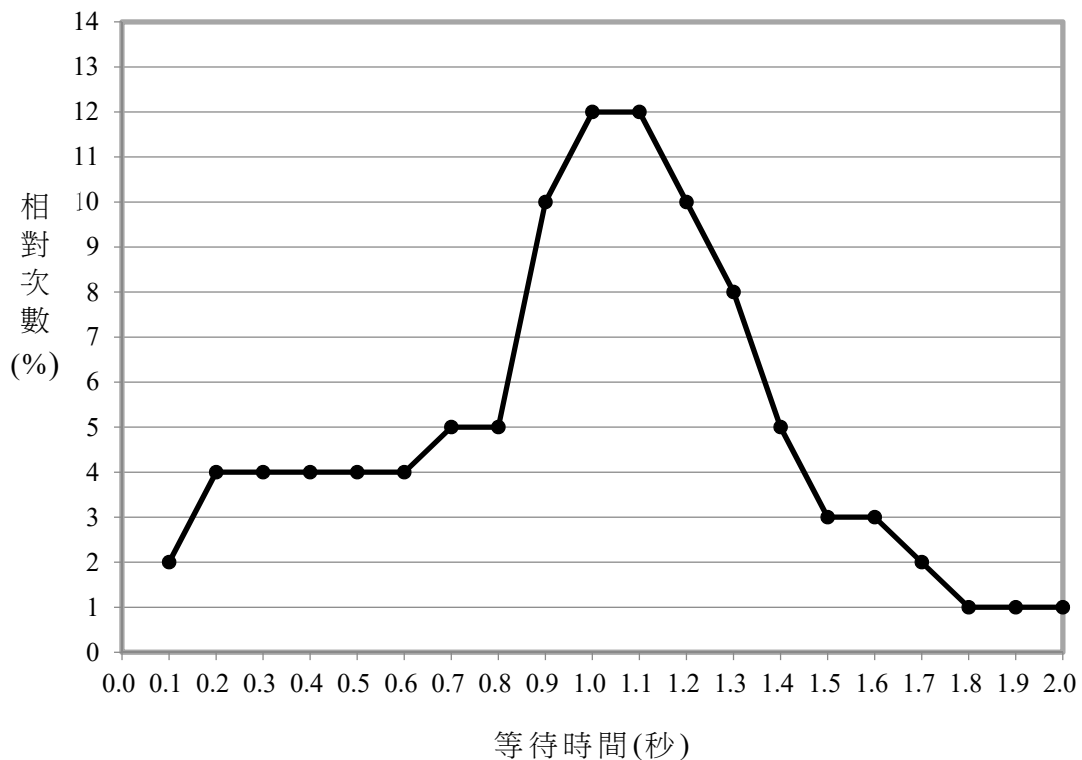
(2) $-\frac{a}{b} > -3$

(3) $-\frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

(4) b 可能為 -3

(5) b 可能為 1

5. 當我們打電話到大公司時，電話會透過公司的交換機轉接到所撥的號碼或分機，這個時候就會有等待接通的時間。實際測試發現，如果等待時間小於或等於 0.8 秒，打電話的人會完全沒有等待的感覺（可稱為無感等待），但如果等待時間大於或等於 1.5 秒，打電話的人就會感覺不耐煩（可稱為不耐等待）。某公司交換機的等待時間與相對次數如下圖。圖中最短等待時間為 0.1 秒，最長的等待時間為 2.0 秒，等待時間皆以 0.1 秒單位計，圖中的黑點代表該等待時間的相對次數，如：等待時間為 1.1 秒的相對次數為 12%。



根據上述資訊，試選出正確的選項。

- (1) 無感等待所占比例較不耐等待高
- (2) 無感等待所占比例達三分之一以上
- (3) 發生不耐等待的比例達 10% 以上
- (4) 等待時間不到 1.0 秒所占比例達一半以上
- (5) 等待時間既非無感等待、也未發生不耐等待所占比例達一半以上

6. 某甲在坐標平面上點 $(3,4)$ 的位置，擲一均勻銅板，若出現正面，則以向量 $(1,-1)$ 的方向與大小移動；若出現反面，則以向量 $(-1,-1)$ 的方向與大小移動。到達新位置之後，重複同樣的步驟，直到抵達 x 軸或 y 軸時停止。試選出正確的選項。
- (1) 甲可能到達點 $(0,0)$
 - (2) 若甲停在 y 軸，則甲恰好移動 4 次
 - (3) 甲最後停在 y 軸的機率大於停在 x 軸的機率
 - (4) 甲最後停在點 $(2,0)$ 的機率為 0
 - (5) 甲最後停在點 $(1,0)$ 與停在點 $(5,0)$ 的機率相等

三、選填題（占 32 分）

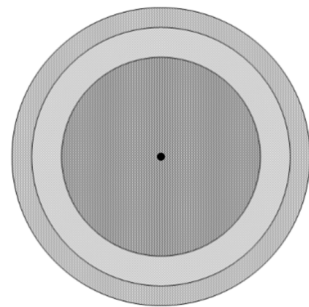
說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（7-17）。
2.每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若 $f(x)$ 為二次的實係數多項式函數，且滿足 $f(0)+f(1)=5$ ， $f(1)+f(2)=17$ ， $f(2)+f(0)=14$ ，則 $f(x)=\underline{\textcircled{7}x^2+\textcircled{8}x+\textcircled{9}}$ 。

- B. 坐標平面上有不共線的三點 A, B, C 且點 P 在線段 $\overline{BC}$ 上，並令 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 。

若 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$ ，則 x 的值為 $\underline{\frac{\textcircled{10}}{\textcircled{11}}}$ ， y 的值為 $\underline{\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}}$ 。（化為最簡分數）

- C. 某實驗室有輻射外洩，危害附近環境。根據調查：該輻射第一天污染區域是一個以實驗室為中心，半徑 2 公里的圓形區域，如圖中最內圓的圓內區域。第二天與第三天污染區域逐漸擴大，都是以實驗室為中心，但污染半徑越來越大的圓形區域，如圖中第二個與第三個同心圓的圓內區域。已知輻射每天污染區域依照上述同心圓的模式向外擴大區域，而且新增污染區域之面積都是前一天新增污染區域面積的 $\frac{5}{7}$ 倍，在污染一直持續下去的條件下，全部污染區域



會趨近於半徑為 $\sqrt{\textcircled{14} \textcircled{15}}$ 公里的圓形區域。

- D. 在所有滿足不等式 $|4-3x|<11$ 的整數中，選取三相異整數（不計順序），而所選取的三數之中位數大於或等於該三數之平均數的選法有 $\textcircled{16} \textcircled{17}$ 種。

— — — 以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 — — —

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一. 據說，「六人國」是因為 200 年前該國僅有 6 個人而得名。人口學家估算：

過去 200 年來，已知該國人口數以平均年成長率為 $\frac{1}{16}$ 的速率增加，即平均每年增加的人口數為前一年總人口數的 $\frac{1}{16}$ 。

利用參考數據： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771$ ，試回答下列問題。

- (1) 已知連續兩年中，第一年「六人國」的人口數為 a ，第二年的人口數為 ka ，試求 k 的值。（2 分）
- (2) 利用 $\log 16$ 與 $\log 18$ 的近似值，以內差法求 $\log 17$ 的近似值。（計算至小數點後第四位）（4 分）
- (3) 已知「六人國」現在的人口數很接近 10^n （其中 n 為正整數），試求正整數 n 的值。（5 分）

背面還有試題

二．等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的前三項可表為 $\begin{cases} a_1 = x^2 + x + 3 \\ a_2 = 2x + 2 \\ a_3 = x + 2 \end{cases}$ ，其中 x 為實數。試回答下列問題。

- (1) 試求 x 的所有可能值。(6 分)
- (2) 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項都是有理數，試求 x 的值及所對應的公比。(4 分)
- (3) 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 並不是每一項都是有理數，試求 x 的值及所對應的公比。(5 分)

109 學年度指定科目考試（補考）

數學乙考科選擇（填）題答案

題號		答案
1		2
2		4
3		5
4		3,5
5		1,3,5
6		4
A	7	3
	8	0
	9	1
B	10	2
	11	3
	12	1
	13	3
C	14	1
	15	4
D	16	2
	17	2

109 學年度指定科目考試(補考) 數學乙考科非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。

109 學年度指定科目考試(補考)數學乙考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題 (2分)

因為連續兩年的第一年人口數為 a ，每年的人口成長率為 $\frac{1}{16}$ ，故連續兩年的第二年人口數應為 $a \times \left(1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{17}{16}a$ ，即得 $k = \frac{17}{16}$ 。

第(2)小題 (4分)

因為

$$\log 16 = 4 \log 2 \approx 1.2040$$

$$\log 18 = \log 2 + 2 \log 3 \approx 1.2552$$

由內差法，得

$$\log 17 = \frac{\log 16 + \log 18}{2} \approx 1.2296$$

第(3)小題 (5分)

因為一開始只有 6 個人，以每年的人口成長率 $\frac{1}{16}$ 計算，經過 200 年後，人

口應有 $6 \times \left(\frac{17}{16}\right)^{200}$ 。依題意可得 $10^n \approx 6 \times \left(\frac{17}{16}\right)^{200}$ ，兩邊取對數得

$n \approx \log 6 + 200(\log 17 - \log 16) \approx 5.8981 \approx 6$ ，故 $n = 6$ 。

第二題

第(1)小題 (6 分)

由 $a_1 a_3 = a_2^2$ ，我們有 $(x^2 + x + 3)(x + 2) = (2x + 2)^2$ ，化簡得 $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$ 。

利用一次因式檢驗法可得 $x = 2$ 為該三次多項式的一根。

因此 $x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x^2 + x - 1)$ ，解得該三次多項式的另兩根為 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 和 $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 。

第(2)小題 (4 分)

依題意，等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項均為有理數，若且唯若相鄰兩項 $a_2 = 2x + 2$ 和 $a_3 = x + 2$ 皆為有理數，若且唯若 x 為有理數。

由(1)得 $x = 2$ 。因此，公比 $= \frac{2}{3}$ 。

第(3)小題 (5 分)

依題意由第(2)題的推理可得 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 。

(A) 當 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 時，代入數列 $\langle a_n \rangle$ 得公比 $= \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ 。

(B) 當 $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 時，代入數列 $\langle a_n \rangle$ 得公比 $= \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ 。