

# 財團法人大學入學考試中心基金會

## 111學年度分科測驗試題

### 數學甲考科

#### —作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的  $\square^3$  與第 18-2 列的  $\square^8$  劃記，如：

18-1	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^\pm$
18-2	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^\pm$

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的  $\square^-$  與第 19-2 列的  $\square^7$  劃記，如：

19-1	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^\pm$
19-2	$\square^1$	$\square^2$	$\square^3$	$\square^4$	$\square^5$	$\square^6$	$\square^7$	$\square^8$	$\square^9$	$\square^0$	$\square^-$	$\square^\pm$

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 設  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令  $b = \sum_{n=1}^3 \log_{a_n} a_{n+1}$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $2 < b \leq 3$       (2)  $3 < b \leq 4$       (3)  $4 < b \leq 5$       (4)  $5 < b \leq 6$       (5)  $6 < b \leq 7$

2. 設  $c$  為實數使得三元一次方程組  $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + cy + 3z = 1 \\ 3x - 3y + cz = 0 \end{cases}$  無解。試選出  $c$  之值。

- (1) -3      (2) -2      (3) 0      (4) 2      (5) 3

3. 坐標空間中  $O$  為原點，點  $P$  在第一卦限且  $\overline{OP}=1$ 。已知直線  $OP$  與  $x$  軸有一夾角為  $45^\circ$ ，且  $P$  點到  $y$  軸的距離為  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。試選出點  $P$  的  $z$  坐標。

- (1)  $\frac{1}{2}$             (2)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$             (3)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$             (4)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$             (5)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

## 二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 設多項式  $f(x)=x^3+2x^2-2x+k$ 、 $g(x)=x^2+ax+1$ ，其中  $k,a$  為實數。已知  $g(x)$  整除  $f(x)$ ，且方程式  $g(x)=0$  有虛根。試選出為方程式  $f(x)=0$  的根之選項。

- (1)  $-3$             (2)  $0$             (3)  $1$             (4)  $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$             (5)  $\frac{3+\sqrt{-5}}{2}$

5. 坐標平面上有一圖形  $\Gamma$ ，其方程式為  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 101$ 。試選出正確的選項。

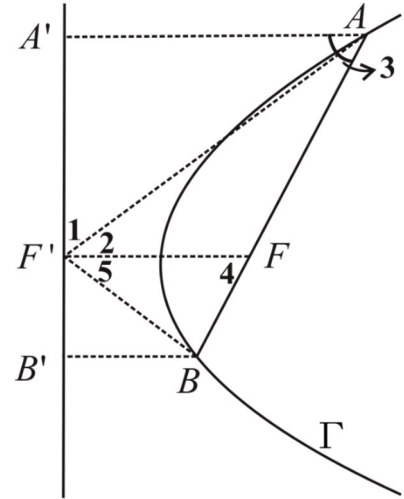
- (1)  $\Gamma$  與  $x$  軸負向、 $y$  軸負向分別交於  $(-9,0)$ 、 $(0,-9)$
- (2)  $\Gamma$  上  $x$  坐標最大的點是點  $(11,0)$
- (3)  $\Gamma$  上的點與原點距離的最大值為  $\sqrt{2} + \sqrt{101}$
- (4)  $\Gamma$  在第三象限的點之極坐標可用  $[9, \theta]$  表示，其中  $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
- (5)  $\Gamma$  經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含  $xy$  項的二元二次方程式表示

6. 假設 2 階方陣  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  所代表的線性變換將坐標平面上三點  $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$  分別映射到  $O(0,0)$ 、 $A'(3, \sqrt{3})$ 、 $B'(-\sqrt{3}, 3)$ ，並將與原點距離為 1 的點  $C(x,y)$  映射到點  $C'(x',y')$ 。試選出正確的選項。

- (1) 行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$
- (2)  $\overline{OC'} = 2\sqrt{3}$
- (3)  $\overrightarrow{OC}$  和  $\overrightarrow{OC'}$  的夾角為  $60^\circ$
- (4) 有可能  $y = y'$
- (5) 若  $x < y$  則  $x' < y'$

7. 假設  $A, B$  為一拋物線  $\Gamma$  上兩點且其連線段通過  $\Gamma$  的焦點  $F$ 。設  $A, F, B$  在  $\Gamma$  之準線上的投影分別為  $A', F', B'$ 。試選出等於  $\frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}$  的選項。(注意：此示意圖僅說明各點的相關位置，各點間距離關係並不正確)

- (1)  $\tan \angle 1$ ，其中  $\angle 1 = \angle A'F'A$   
 (2)  $\sin \angle 2$ ，其中  $\angle 2 = \angle AF'F$   
 (3)  $\sin \angle 3$ ，其中  $\angle 3 = \angle A'AF$   
 (4)  $\cos \angle 4$ ，其中  $\angle 4 = \angle F'FB$   
 (5)  $\tan \angle 5$ ，其中  $\angle 5 = \angle FF'B$



8. 假設兩數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數  $n$  都滿足  $b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$ 。已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，試選出正確的選項。

- (1)  $b_n < 6 - \frac{4n-1}{n}$                       (2)  $b_n > \frac{4n-1}{2n}$                       (3) 數列  $\langle b_n \rangle$  有可能發散  
 (4)  $a_{10000} < 6.1$                       (5)  $a_{10000} > 5.9$

### 三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有 5 支籤、其中只有 1 支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取 3 回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。

我們可將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第  $X$  位抽籤的顧客，並以  $E(X)$  表示隨機變數  $X$  的期望值，則

$$E(X) = \frac{(9-1)(9-2)}{1} \text{。 (四捨五入到整數位)}$$

10. 老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這 4 天，發完國、英、數、社、自共 5 張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子一定要在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子不要在週二發出。依

此要求，學藝共有  $\frac{(10-1)(10-2)}{1}$  種安排方式。

11. 在複數平面上，複數  $z$  在第一象限且滿足  $|z|=1$  以及  $\left|\frac{-3+4i}{5}-z^3\right|=\left|\frac{-3+4i}{5}-z\right|$ ，其中

$i=\sqrt{-1}$ 。若  $z$  的實部為  $a$ 、虛部為  $b$ ，則  $a=\frac{\sqrt{\textcircled{11-1}}}{\textcircled{11-2}}$ 、 $b=\frac{\textcircled{11-3}\sqrt{\textcircled{11-4}}}{\textcircled{11-5}}$ 。

(化為最簡根式)

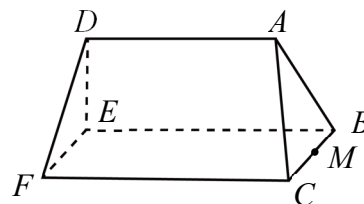
背面還有試題

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選填題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

有一積木（如圖），其中  $ACFD$  和  $ABED$  是兩個全等的等腰梯形， $BCFE$  是一個矩形。設  $A$  點在直線  $BC$  的投影為  $M$  且在平面  $BCFE$  的投影為  $P$ 。已知  $\overline{AD}=30$ 、 $\overline{CF}=40$ 、 $\overline{AP}=15$  且  $\overline{BC}=10$ 。將平面  $BCFE$  置於水平桌面上，且將與  $BCFE$  平行的平面稱為水平面。



試回答下列問題。

12. 利用  $\overline{AD}$  在平面  $BCFE$  的投影長為 30，可得  $\tan \angle AMP = \underline{\quad 12 \quad}$ 。（選填題，2 分）

13. 令  $Q$  為  $\overline{FC}$  上一點，滿足  $\overrightarrow{AQ}$  與  $\overrightarrow{DF}$  平行。利用  $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACQ$  為全等三角形，證明若水平面  $W$  介於  $A, P$  之間且與  $A$  的距離為  $x$ ，則  $W$  與此積木所截的矩形區域之面積為  $20x + \frac{4}{9}x^2$ 。（非選擇題，4 分）

14. 將線段  $\overline{AP}$  的  $n$  等分點沿著向量  $\overrightarrow{AP}$  的方向依序設為  $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = P$ 。在每一個分段  $\overline{P_{k-1}P_k}$ ，考慮以通過  $P_k$  的水平面與此積木所截的矩形為底、 $\overline{P_{k-1}P_k}$  為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和（不需化簡），且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。（非選擇題，6 分）

背面還有試題

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  滿足  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9$  以及  $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ 。若令  $|\vec{a}| = x$ ，其中  $1 < x < 8$ ，且令  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的夾角為  $\theta$ ，則利用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a} - \vec{b}$  所形成的三角形，可將  $\cos\theta$  以  $x$  表示成  $\frac{c}{9x-x^2} + d$ ，其中  $c$ 、 $d$  為常數且  $c > 0$ 。令此表示式為  $f(x)$ ，且其定義域為  $\{x \mid 1 < x < 8\}$ 。試回答下列問題。

15. 求  $f(x)$  及其導函數。(非選擇題，4 分)

16. 說明  $f(x)$  在定義域中遞增、遞減的情況。並說明  $x$  為多少時  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的夾角  $\theta$  最大。  
(非選擇題，4 分)

17. 利用  $f(x)$  的一次估計（一次近似），求當  $x=4.96$  時， $\cos\theta$  約為多少？  
（非選擇題，4分）

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

9. 若  $X \sim B(n, p)$  為二項分布，則期望值  $E(X) = np$ ，變異數  $Var(X) = np(1-p)$ ；

若  $X \sim G(p)$  為幾何分布，則期望值  $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數  $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。



題號	<p style="text-align: center;"><b>作 答 區</b></p> <p>注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。</p>
14	<p>【請用黑色墨水的筆作答】</p>
15	<p>【請用黑色墨水的筆作答】</p>

題號	<p style="text-align: center;"><b>作 答 區</b></p> <p>注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。</p>
16	<p>【請用黑色墨水的筆作答】</p>
17	<p>【請用黑色墨水的筆作答】</p>

111 學年度分科測驗  
數學甲考科選擇（填）題答案

題號	答案	題號	答案	題號	答案	
1	3	9	9-1	1	12	3
2	2		9-2	4	13	/
3	4	10	10-1	4	14	/
4	1,4		10-2	2	15	/
5	1,3,5	11	11-1	5	16	/
6	2,4		11-2	5	17	/
7	3,5		11-3	2		
8	2,5		11-4	5		
			11-5	5		

※ 答案「/」者，表示該題為非選擇題。

## 111 學年度分科測驗 數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。111 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 13、14、15、16、17 題。其中第 13、15、16、17 題每題為 4 分；第 14 題為 6 分，總計 22 分。

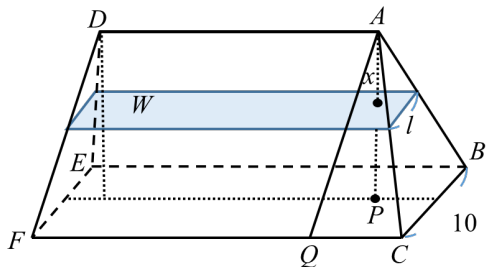
非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的第 332 期《選才電子報》。

111 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

### 第 13 題

一、滿分參考答案：



$W$  與  $\triangle ABC, \triangle ACQ$  所截邊長相等，設此邊長為  $l$ ，由相似形可得  $\frac{l}{10} = \frac{x}{15}$ ，所以  $l = \frac{2x}{3}$ 。

所截矩形另一邊長為  $30 + l = 30 + \frac{2x}{3}$ ，所以矩形面積為  $\frac{2x}{3}(30 + \frac{2x}{3}) = 20x + \frac{4}{9}x^2$ 。

二、評分原則：

能否依據題意所給條件，以相似形求得矩形邊長，並證得矩形面積。

### 第 14 題

一、滿分參考答案：

1. 由  $\overline{P_0P_k} = \frac{15k}{n}$ ，與過  $P_k$  的水平面所截矩形面積為  $20\left(\frac{15k}{n}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{15k}{n}\right)^2$ ，再乘上高

$\frac{15}{n}$ ，得黎曼和  $\sum_{k=1}^n \left[ 20\left(\frac{15k}{n}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{15k}{n}\right)^2 \right] \frac{15}{n}$ 。

2. 體積的定積分式為  $\int_0^{15} \left( 20x + \frac{4}{9}x^2 \right) dx$ 。

利用反導函數得積分值為  $\left( 10x^2 + \frac{4}{27}x^3 \right) \Big|_0^{15} = 10 \times 15^2 + \frac{4}{27} \times 15^3 = 2750$ 。

二、評分原則：

能否由切片方法寫下估計積木體積的黎曼和，並能利用定積分表示積木體積，進而求得積木體積值。

### 第 15 題

一、滿分參考答案：

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a} - \vec{b}$  所形成的三角形邊長分別為  $x$ 、 $9-x$ 、 $7$ 。

由餘弦定理得  $\cos \theta = f(x) = \frac{x^2 + (9-x)^2 - 7^2}{2x(9-x)} = \frac{x^2 - 9x + 16}{x(9-x)} = \frac{16}{9x-x^2} - 1$ ，

微分得  $f'(x) = \frac{-16(9-2x)}{(9x-x^2)^2}$ 。

二、評分原則：

能否正確操作餘弦定理並得出  $f(x)$ ，並以微分除法律求其導函數。

### 第 16 題

一、滿分參考答案：

#### 法一：微分

由上題的  $f'(x)$  可得：

當  $1 < x < \frac{9}{2}$  時， $f'(x) < 0$ ，故此時  $f(x)$  為遞減； $\frac{9}{2} < x < 8$  時  $f'(x) > 0$ ，此時  $f(x)$  為遞

增。

當  $x = \frac{9}{2}$  時， $f'(x) = 0$ ， $f(x) = \cos \theta$  有最小值，此時夾角  $\theta$  為最大。

### 法二：配方法

由上題的  $f(x) = \frac{16}{9x-x^2} - 1$ ，其中  $\frac{16}{9x-x^2}$  的分子為常數，將分母配方得

$$9x - x^2 = -(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{81}{4},$$

當  $1 < x < \frac{9}{2}$  時，分母遞增，此時  $f(x)$  為遞減； $\frac{9}{2} < x < 8$  時，分母遞減，此時  $f(x)$  為遞增。

當  $x = \frac{9}{2}$  時，分母有最大值， $f(x) = \cos \theta$  有最小值。此時夾角  $\theta$  為最大。

二、評分原則：

以一階微分  $f'(x)$  的正負來說明  $f(x)$  在哪個區域遞增、遞減，以說明  $x$  為多少時，夾角  $\theta$  為最大。

### 第 17 題

一、滿分參考答案：

因為 5 在 4.96 附近且易於計算，所以是最合適的估計參考點。在 5 附近的一次估計為  $f(x) \approx f(5) + f'(5)(x-5)$ ，

由  $f(5) = -0.2$  與  $f'(5) = 0.04$ ，可得  $f(4.96) \approx -0.2 + 0.04 \times (-0.04) = -0.2016$ 。

二、評分原則：

會寫出一次估計形式，並找到合理的估計參考點說明當  $x = 4.96$  時， $\cos \theta$  約為多少？