

財團法人大學入學考試中心基金會
112學年度分科測驗試題
數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 \square^3 與第 18-2 列的 \square^8 劃記，如：

18-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 \square^- 與第 19-2 列的 \square^7 劃記，如：

19-1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 坐標平面上，一質點由點 $(-3, -2)$ 出發，沿著向量 $(a, 1)$ 的方向移動 5 單位長之後剛好抵達 x 軸，其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項？

- (1) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (5) $2\sqrt{6}$

2. 放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有 A 、 B 兩種放射性物質，其半衰期分別為 T_A 、 T_B 。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質 B 的質量為物質 A 的質量的四分之一。根據上述，試問 T_A 、 T_B 滿足下列哪一個關係式？

- (1) $-2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (2) $2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (3) $-2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$
(4) $2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$ (5) $2 \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$

3. 試問極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \left(\sqrt{4n^2 + 9 \times 1^2} + \sqrt{4n^2 + 9 \times 2^2} + \cdots + \sqrt{4n^2 + 9 \times (n-1)^2} \right)$$

的值可用下列哪一個定積分表示？

- (1) $\int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx$ (2) $\int_0^3 \sqrt{1+9x^2} dx$ (3) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2} dx$
(4) $\int_0^3 \sqrt{4+9x^2} dx$ (5) $\int_0^3 \sqrt{4x^2+9} dx$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 設 a, b 為實數。已知四個數 $-3, -1, 4, 7$ 皆滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq b$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq b$
- (2) $3, 1, -4, -7$ 滿足 x 的不等式 $|x+a| \leq b$
- (3) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a| \leq \frac{b}{2}$
- (4) b 可能等於 4
- (5) a, b 可能相等

5. 考慮實係數多項式 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 。已知方程式 $f(x) = 0$ 有虛根 $1 + 2i$ （其中 $i = \sqrt{-1}$ ），試選出正確的選項。

- (1) $1 - 2i$ 也是 $f(x) = 0$ 的根
- (2) a, b 皆為正數
- (3) $f'(2.1) < 0$
- (4) 函數 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 有局部極小值
- (5) $y = f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

6. 設 a, b, c, d, r, s, t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\vec{u} = (a, b, 0)$ 、 $\vec{v} = (c, d, 0)$ 及 $\vec{w} = (r, s, t)$ 滿足內積 $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ 。考慮三階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$ ，試選出正確的

選項。

(1) 若 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

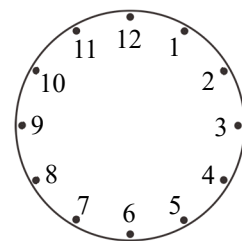
(2) 若 $t \neq 0$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(3) 若存在一個向量 \vec{w}' 滿足 $\vec{w}' \cdot \vec{u} = \vec{w}' \cdot \vec{v} = 0$ 且外積 $\vec{w}' \times \vec{w} \neq \vec{0}$ ，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(4) 若對任意三個實數 e, f, g ，向量 (e, f, g) 都可以表示成 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 的線性組合，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

(5) 若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ，則 A 的行列式不等於 0

7. 有一個依順時針方向依序標示 1, 2, ..., 12 數字的圓形時鐘(如圖所示)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：
- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
 - 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。



例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n ，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置， $P(X_n = k)$ 代表 $X_n = k$ 的機率(其中 $k = 1, 2, \dots, 12$)，且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

(1) $E(X_1) = 6$

(2) $P(X_2 = 12) = \frac{1}{4}$

(3) $P(X_8 = 5) \geq \frac{1}{2^8}$

(4) $P(X_8 = 4) = P(X_8 = 8)$

(5) $E(X_8) \leq 7$

8. 複數平面上，設 \bar{z} 代表複數 z 的共軛複數，且 $i = \sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。
- (1) 若 $z = 2i$ ，則 $z^3 = 4i\bar{z}$
 - (2) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\bar{\alpha}$ ，則 $|\alpha| = 2$
 - (3) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\bar{\alpha}$ 且令 $\beta = i\alpha$ ，則 $\beta^3 = 4i\bar{\beta}$
 - (4) 滿足 $z^3 = 4i\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主幅角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$
 - (5) 恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3 = 4i\bar{z}$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 已知平面上直角 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 、 $\overline{BC} = 2$ 。若分別以 \overline{AB} 與 \overline{AC} 為底邊在 $\triangle ABC$ 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$ ，

$$\text{則 } \overline{MN}^2 = \frac{\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}}{\textcircled{9-3}} \text{。 (化為最簡分數)}$$

10. 坐標空間中有方向向量為 $(1, -2, 2)$ 的直線 L 、平面 $E_1: 2x + 3y + 6z = 10$ 與平面

$$E_2: 2x + 3y + 6z = -4 \text{。則 } L \text{ 被 } E_1 \text{、} E_2 \text{ 所截線段的長度為 } \frac{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2}}{\textcircled{10-3}} \text{。 (化為最簡分數)}$$

11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：主辦單位準備編號 1、2、...、9 的牌卡十張，其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

- (1) 此四位數大於 6400
- (2) 此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。

依上述規則，共有 $\underbrace{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2} \textcircled{11-3} \textcircled{11-4}}_{4}$ 個抽出排成的四位數可獲得獎品。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設 a, b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x) = ax^2$ 的圖形與圓 $\Omega: x^2 + y^2 - 3y + b = 0$ 皆通過點 $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

12. 試求向量 \overrightarrow{CO} 與 \overrightarrow{CP} 夾角的餘弦值。（非選擇題，2 分）
13. 試證明 $y = f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。（非選擇題，4 分）
14. 試求 $y = f(x)$ 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。（非選擇題，6 分）

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角（其中 $0 < \theta < \pi$ ）的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 $\Gamma': 40x^2 + 4\sqrt{5}xy + 41y^2 = 180$ ，點 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15. 橢圓 Γ' 的長軸長為 $\frac{\textcircled{15-1}}{\sqrt{\textcircled{15-2}}}$ 。（化為最簡根式）（選填題，2 分）

16. 試求 Γ' 短軸所在的直線方程式與短軸長。（非選擇題，4 分）

17. 已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 x 軸上，且 P' 點的 x 坐標大於 0。
試求 P 點的坐標。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

財團法人大學入學考試中心基金會

112 學年度分科測驗

數學甲考科

答題卷

應試號碼、條碼、姓名 (不得污損、塗改或破壞)

確認答題卷應試號碼與姓名正確無誤

確認後 考生簽名	請用正楷簽全名
-------------	---------

※考試開始鈴響起，經確認確為本人之應試號碼與姓名後，於「確認後考生簽名」欄以正楷簽全名。使用備用答題卷者，請務必於「確認後考生簽名」欄簽全名。
※請詳閱試題本上作答注意事項與答題卷劃記及書寫注意事項。

※選擇題正確作答樣例： A B C D

第壹部分、選擇(填)題 (占 76 分)

注意：考生如未能劃滿方格，或不依試題本之作答注意事項劃記致機器無法正確辨識答案時，恐將影響成績。

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
9-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
9-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
9-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
10-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
10-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
10-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
11-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
11-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
11-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
11-4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

第貳部分、混合題或非選擇題 (占 24 分)

作答區

注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。

12	【請用黑色墨水的筆作答】
----	--------------

13	【請用黑色墨水的筆作答】
----	--------------

作 答 區	
題號	注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
14	【請用 <u>黑色墨水</u> 的筆作答】
15-1	$\frac{1}{\square}$ $\frac{2}{\square}$ $\frac{3}{\square}$ $\frac{4}{\square}$ $\frac{5}{\square}$ $\frac{6}{\square}$ $\frac{7}{\square}$ $\frac{8}{\square}$ $\frac{9}{\square}$ $\frac{0}{\square}$ $\frac{-}{\square}$ $\frac{\pm}{\square}$ 【請用 <u>2B</u> 鉛筆作答】
15-2	$\frac{1}{\square}$ $\frac{2}{\square}$ $\frac{3}{\square}$ $\frac{4}{\square}$ $\frac{5}{\square}$ $\frac{6}{\square}$ $\frac{7}{\square}$ $\frac{8}{\square}$ $\frac{9}{\square}$ $\frac{0}{\square}$ $\frac{-}{\square}$ $\frac{\pm}{\square}$ 【請用 <u>2B</u> 鉛筆作答】
16	【請用 <u>黑色墨水</u> 的筆作答】

作 答 區	
題號	注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
16	【請用 <u>黑色墨水</u> 的筆作答】
17	【請用 <u>黑色墨水</u> 的筆作答】

112 學年度分科測驗
數學甲考科選擇（填）題答案

題號	答案	題號	答案	題號	答案		
1	4	9	9-1	1	12	/	
2	2		9-2	3	13	/	
3	3		9-3	3	14	/	
4	1,2	10	10-1	2	15	15-1	2
5	1,3		10-2	1		15-2	5
6	1,4,5		10-3	4	16	/	
7	1,4	11	11-1	1	17	/	
8	2,3		11-2	5			
			11-3	5			
			11-4	4			

※答案「/」者，表示該題為非選擇題。

112 學年度分科測驗

數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。112 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 12、13、14、16、17 題。其中第 12 題為 2 分；第 13 題為 4 分、第 14 題為 6 分、第 16 題為 4 分；第 17 題為 6 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。例如最後求解答案時，因計算錯誤，未得到正確答案；或能運用推理能力解決問題，但未能完整檢驗結果的合理性與正確性。若答題時未於解題過程中清楚表達如何依據題設進行推論，則無法得到分數，例如只有答案，沒有解題過程；或解題觀念錯誤；或一開始用不符合題設的數據作答。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。112 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第 12 題

一、滿分參考答案：

根據題意，將 $P(1, \frac{1}{2})$ 代入 $x^2 + y^2 - 3y + b = 0$ ，推得 $b = \frac{1}{4}$ 。

再利用 $x^2 + y^2 - 3y + \frac{1}{4} = 0$ 配方得 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 2$ ，故圓心 C 點坐標為 $(0, \frac{3}{2})$ 、

$$\vec{CO} = \left(0, -\frac{3}{2}\right), \vec{CP} = (1, -1),$$

所以 \vec{CO} 與 \vec{CP} 夾角的餘弦值為 $\frac{\left(0, -\frac{3}{2}\right) \cdot (1, -1)}{\frac{3}{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

二、評分原則：

正確計算得出題意所求為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

第 13 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

$y=f(x)$ 圖形在點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right|_{x=1} = 1$ ，直線 CP 斜率為 $\frac{\frac{1}{2}-3}{1-0} = -1$ ，

直線 CP 與 Ω 過點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線垂直，所以 Ω 過點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 $\frac{-1}{-1} = 1$ ，

兩切線都過 P 點且斜率相等，所以 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。

【解法二】

$y=f(x)$ 圖形在點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right|_{x=1} = 1$ ， $y=f(x)$ 圖形在點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切

線方程式為 $y = x - \frac{1}{2}$ 。圓心 C 到直線 $y = x - \frac{1}{2}$ 的距離為 $\frac{\left| 0 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$ ，等於半

徑，所以 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。

二、評分原則：

(1) 正確計算得到 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 1，或寫出正確的切線

方程式 $y = x - \frac{1}{2}$ ，且有正確的解題過程。

(2) 正確證明 $y=f(x)$ 圖形或 Ω 其中一個在 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線也是另一個圖形的切線，

且有正確的推論過程與理由。

第 14 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

$y=f(x)$ 圖形對 y 軸對稱，圓 Ω 的圖形也對 y 軸對稱，先求在右半平面的面積：

x 軸、 y 軸、 $x=1$ 以及線段 \overline{CP} 所圍梯形面積為 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \times 1 = 1$ ，減去正 y 軸、線段

\overline{CP} 與圓 Ω (半徑為 $\sqrt{2}$) 所圍扇形面積為 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ，再減去 Γ 與 x 軸以及 $x=1$

所圍區域面積 $\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}$ ，

得右半平面的面積為 $1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$ ，故題意所求面積為 $2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$ 。

【解法二】

$$\int_{-1}^1 \left[\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2-x^2} \right) - \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

$\int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx$ 為圓 Ω 的上半圓在區間 $[-1,1]$ 的面積，為 $\frac{1}{4} \times \pi \times 2 + \frac{2 \times 1 \times 1}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$ 。

$$\text{故 } \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx = \frac{8}{3} - \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}。$$

二、評分原則：

- (1) 正確計算扇形面積 COP 為 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}$ ，且有正確的解題過程。
- (2) 正確計算得到題意所求區域面積為 $\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$ ，且有正確的解題過程。

第 16 題

一、滿分參考答案：

因為 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3} \right)$ 為長軸的其中一個頂點，且短軸與長軸垂直，故 Γ' 的短軸位在直

線 $2y = \sqrt{5}x$ 上，代入方程式 $40x^2 + 4\sqrt{5}xy + 41y^2 = 180$ ，得 $x^2 = \frac{16}{9}$ ，故 $\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3} \right)$ 為短軸

的其中一個頂點，短軸長為 $2\sqrt{\left(\frac{4}{3} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3} \right)^2} = 4$ 。

二、評分原則：

- (1) 正確計算得到短軸的方程式 $2y = \sqrt{5}x$ ，且有正確的解題過程。
- (2) 正確計算得到短軸長為 4，且有正確的解題過程。

第 17 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

依據題意，線性變換將 $(1,0)$ 變換到 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 且將 $(0,1)$ 變換到

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ 所以線性變換的矩陣表示為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\text{設 } P \text{ 點坐標為 } (x,y), (x,y) \text{ 由此線性變換可得 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y \\ \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y \end{bmatrix},$$

$$P' \left(\frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y, \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y \right) \text{ 在 } x \text{ 軸上, 可推得 } y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

因為 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ 且 P 點在 Γ 上, 將 $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 代入, 解得 $x^2 = 2$

因旋轉角 θ 為銳角, P 點在第四象限, 故 $x = \sqrt{2}, y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$,

$$P \text{ 點坐標為 } \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2} \right).$$

【解法二】

設 P' 點坐標為 $(a,0)$, $a > 0$, 代入 Γ' 的方程式,

$$\text{則 } 40 \times a^2 = 180 \Rightarrow a^2 = \frac{180}{40} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 得到 } P' \text{ 點坐標為 } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\text{旋轉 } \theta \text{ 角, 則 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}, \sin \theta = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{旋轉矩陣為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ 且其逆矩陣為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, P \text{ 點坐標為 } \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2} \right).$$

二、評分原則：

(1) 利用試題條件解得橢圓 Γ 的標準式 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ 與 P 點在 $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 上，推得 P 點坐標為 $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算 P' 點坐標為 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 與正確寫出旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 的逆矩陣

$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ，推得 P 點坐標為 $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ，且有正確的解題過程。