

財團法人大學入學考試中心基金會
114學年度分科測驗試題
數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 \square 與第 18-2 列的 \square 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 \square 與第 19-2 列的 \square 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

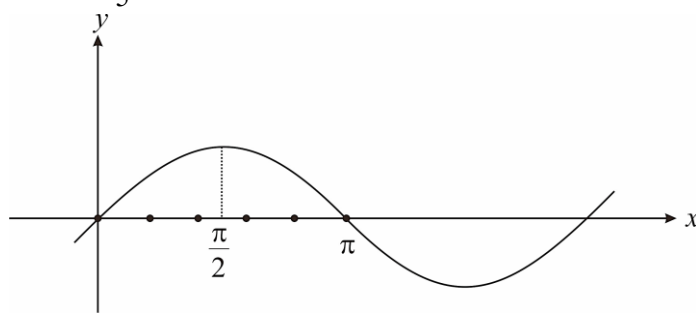
第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 坐標平面上，函數 $y = \sin x$ 的圖形對稱於 $x = \frac{\pi}{2}$ ，如圖所示。試選出在 $0 < \theta \leq \pi$ 的

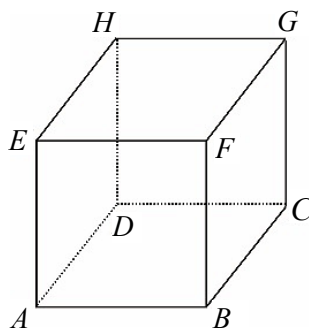
範圍中滿足 $\sin \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{5})$ 的 θ 值。



- (1) $\frac{\pi}{5}$ (2) $\frac{2\pi}{5}$ (3) $\frac{3\pi}{5}$ (4) $\frac{4\pi}{5}$ (5) π

2. 空間中一正立方體 $ABCD - EFGH$ ，其中頂點 $A、B、C、D$ 在同一個平面上，且 \overline{AE} 為其中一個邊，如圖所示。下列選項中，試選出與平面 BGH 以及平面 CFE 皆垂直的平面。

- (1) 平面 ADH
(2) 平面 BCD
(3) 平面 CDG
(4) 平面 DFG
(5) 平面 DFH



3. 《幾何原本》上說：「給定相異兩點可決定一條直線」。一般來說，相異三點可決定 $C_2^3 = 3$ 條直線；但若這三點共線，此時僅決定一條直線。坐標平面上，已知圓 $\Gamma_1: x^2 + y^2 = 4$ 與兩坐標軸交於 4 點、圓 $\Gamma_2: x^2 + y^2 = 2$ 與直線 $x - y = 0$ 交於 2 點、圓 Γ_2 與直線 $x + y = 0$ 交於 2 點。試問這 8 點共可決定幾條不同的直線？

- (1) 12 (2) 16 (3) 20 (4) 24 (5) 28

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 試從下列坐標平面上的二次曲線中，選出與所有的鉛直線都相交的選項。

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(3) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(4) $y = \frac{4}{9}x^2$

(5) $x = \frac{4}{9}y^2$

5. 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中 $a_n = \cos(n\pi - \frac{\pi}{6})$ ， n 為正整數。試選出正確的選項。

(1) $a_1 = -\frac{1}{2}$

(2) $a_2 = a_3$

(3) $a_4 = a_{24}$

(4) $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n = 3 - 2\sqrt{3}$

6. 設指數函數 $f(x)=1.2^x$ 。試選出正確的選項。
- (1) $f(0) > 0$
 - (2) $f(10) > 10$
 - (3) 坐標平面上， $y=1.2^x$ 的圖形與直線 $y=x$ 相交
 - (4) 坐標平面上， $y=1.2^x$ 與 $y=\log(1.2^x)$ 的圖形對稱於直線 $y=x$
 - (5) 對任意正實數 b ， $\log_{1.2} b \neq 1.2^b$
7. 已知實係數多項式 $f(x)$ 的次數大於 5，且其最高次項係數為正。
又 $f(x)$ 在 $x=1、2、4$ 處有極小值，且在 $x=3、5$ 處有極大值。
根據上述，試選出正確的選項。
- (1) $f(1) < f(3)$
 - (2) 存在實數 a, b 滿足 $1 < a < b < 2$ ，使得 $f'(a) > 0$ 且 $f'(b) < 0$
 - (3) $f''(3) > 0$
 - (4) 存在實數 $c > 5$ ，使得 $f'(c) > 0$
 - (5) $f(x)$ 的次數大於 7

8. 設複數 z 的虛部不為 0 且 $|z|=2$ 。已知在複數平面上， 1 、 z 、 z^3 共線。試選出正確的選項。

- (1) $z \cdot \bar{z} = 2$
- (2) $\frac{z^3 - z}{z - 1}$ 的虛部為 0
- (3) z 的實部為 $-\frac{1}{2}$
- (4) z 滿足 $z^2 - z + 4 = 0$
- (5) 在複數平面上， -2 、 z 、 z^2 共線

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 令 A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，且令 B 為以 x 軸為鏡射軸（對稱軸）的鏡射矩陣。令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $BA = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ 。

已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$ ，則 $\tan \theta = \frac{\textcircled{9-1} \textcircled{9-2}}{\textcircled{9-3}}$ 。（化為最簡分數）

10. 坐標空間中一平面與平面 $x=0$ 、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1 、 L_2 。

已知 L_1 、 L_2 互相平行，且 L_1 通過點 $(0, 2, -11)$ 、 L_2 通過點 $(8, 21, 0)$ ，

則 L_1 、 L_2 的距離為 $\sqrt{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2} \textcircled{10-3}}$ 。（化為最簡根式）

11. 坐標平面上有一平行四邊形 Γ ，其中兩邊所在的直線與 $5x-y=0$ 平行、另兩邊所在的直線與 $3x-2y=0$ 垂直。令 Γ 的兩對角線交點為 Q 。已知 Γ 有一頂點 P ，滿足 $\overrightarrow{PQ}=(10,-1)$ ，則 Γ 的面積為 11-1 11-2 11-3。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。

選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

某商店以抽獎方式販售一熱門公仔，每次抽獎都互相獨立且抽中的機率為 $\frac{2}{5}$ 。

參加者可用以下兩種方式參加抽獎。

方式一：先付 225 元得到兩次抽獎機會，只要抽中即停止抽獎且得到一個公仔；

若這兩次皆未抽中，則必須再多付 75 元得到一個公仔。

方式二：抽獎次數不限，每抽獎一次付 100 元。

根據上述，試回答下列問題。

12. 若以方式一抽獎，則共需付 300 元才能得到一個公仔的機率為何？（單選題，2 分）

- (1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ (2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ (3) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$
(4) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ (5) $\left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$

13. 若以方式二抽獎直到抽中一個公仔為止，試依期望值定義，使用 Σ 符號表示所需抽獎次數的期望值，並求其值。（非選擇題，4 分）

14. 假設花費金額不設限直到得到一個公仔為止，試分別求出這兩種抽獎方式得到一個公仔所需付金額的期望值，並說明這兩個期望值的大小關係。（非選擇題，6 分）

15-17 題為題組

設實係數多項式函數 $f(x) = 3ax^2 + (1-a)$ ，其中 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 。在坐標平面上，令 Γ 為 $y = f(x)$ 與 x 軸在 $-1 \leq x \leq 1$ 所圍的區域。根據上述，試回答下列問題。

15. 證明當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$ 皆成立。（非選擇題，4 分）

16. 證明對於所有 $a \in [-\frac{1}{2}, 1]$ ， Γ 的面積皆為 2。（非選擇題，2 分）

17. 令 V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積。試問對所有 $a \in [-\frac{1}{2}, 1]$ ， V 是否都相等？

若相等，則求其值；若不相等，則當 a 為多少時， V 有最大值，並求此最大值。

（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

114 學年度分科測驗

數學甲考科選擇（填）題參考答案

題號	答案	題號	答案	題號	答案	
1	2	9	9-1	—	12	3
2	1		9-2	1	13	/
3	3		9-3	2	14	/
4	3,4	10	10-1	1	15	/
5	3,5		10-2	8	16	/
6	1,3		10-3	5	17	/
7	2,4,5	11	11-1	2		
8	2,3,5		11-2	0		
			11-3	4		

- ※1. 對公布之試題或參考答案有意見者，請至本會大考中心網站 <https://www.ceec.edu.tw> 下載「試題或參考答案反映意見表」，填妥對試題或參考答案之具體意見（未敘明具體意見者不予處理），於 114 年 07 月 16 日（三）前，以限時掛號郵寄至本會「106032 臺北市大安區舟山路 237 號」，逾期不予受理（郵戳或其他等同有效的寄件憑證為憑）。
2. 答案「/」者，表示該題為非選擇題。

114 學年度分科測驗

數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。114 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 13、14、15、16、17 題。其中第 13、15 題為 4 分；第 14、17 題為 6 分；第 16 題為 2 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的第 349 期《選才電子報》。

114 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的滿分參考答案說明如下：

第 13 題

一、滿分參考答案：

次數的期望值為 $\sum_{k=1}^{\infty} k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$)。

此為 $p = \frac{2}{5}$ 的幾何分布，故次數的期望值為 $\frac{1}{p} = \frac{5}{2}$ 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1. 根據題意所給條件，得出次數的期望值為 $\sum_{k=1}^{\infty} k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$ ，且過程正確。

2. 根據題目所給條件，說明此為 $p = \frac{2}{5}$ 的幾何分布，故得次數的期望值為

$$\frac{1}{p} = \frac{5}{2}。$$

部分給分

以上兩個解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 14 題

一、滿分參考答案：

方式一：求出花費金額期望值為 $300 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 225 \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = 252$ 元

方式二：求出花費金額期望值為 $100 \times \frac{5}{2} = 250$ 元

推得方式二需花費金額的期望值較低。

二、評分原則：

滿分：以下三項均須正確

根據題目所給條件，且有計算過程得出方式一所花費金額期望值為 252 元；

根據題目所給條件，且有計算過程得出方式二所花費金額期望值為 250 元；

推得方式二需花費金額的期望值較低。

部分給分

1. 方式一、方式二金額期望值的解題過程正確，但未能正確回答兩個期望值的大小關係。

2. 方式一、方式二金額期望值的解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 15 題

一、滿分參考答案：

法一：

若 $a=0$ ，則 $f(x)=1 \geq 0$ 。

$f'(x)=6ax$ ，若 $a \neq 0$ ，只有在 $x=0$ 時， $f(x)$ 有極值。檢查 $f(0)=1-a \geq 0$ ，以及兩端點 $f(-1)=f(1)=1+2a \geq 0$ ，故推得在 $-1 \leq x \leq 1$ ， $f(x) \geq 0$ 均成立。

法二：

若 $a=0$ ，則 $f(x)=1 \geq 0$ 。

若 $a \neq 0$ ，則 $f(x)$ 圖形為頂點在直線 $x=0$ 上的拋物線。

當 $0 < a \leq 1$ ，拋物線開口朝上， $f(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 的最小值為 $f(0)=1-a \geq 0$ 。

當 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 時，拋物線開口朝下， $f(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 的最小值為

$f(-1)=f(1)=1+2a \geq 0$ ，故推得在 $-1 \leq x \leq 1$ ， $f(x) \geq 0$ 均成立。

法三：

當 $0 \leq a \leq 1$ ，因為 $3ax^2 \geq 0$ ，所以 $3ax^2 + (1-a) \geq 1-a \geq 0$ 。

當 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ ，因為 $3ax^2 \geq 3a$ ，所以 $3ax^2 + (1-a) \geq 1+2a \geq 0$ 。

故推得在 $-1 \leq x \leq 1$ ， $f(x) \geq 0$ 均成立。

二、評分原則：

滿分

根據題意所給條件，證明當 $-1 \leq x \leq 1$ 時， $f(x) \geq 0$ 皆成立，且過程推論正確。

部分給分

1. 利用法一、法二推論時，寫出 $f(0)=1-a \geq 0$ 、 $f(1)=1+2a \geq 0$ 、 $f(-1)=1+2a \geq 0$ ，但未解釋為何僅需判斷這三個即可。
2. 分成 $0 \leq a \leq 1$ 與 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 兩種情況討論，但僅證明其中一種情況。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 16 題

一、滿分參考答案：

$$\int_{-1}^1 (3ax^2 + 1 - a) dx = ax^3 + (1-a)x \Big|_{-1}^1 = 2。$$

二、評分原則：

滿分

根據題意所給條件，證明 Γ 的面積皆為 2，且解題過程正確。

零分

未作答或未達給分標準。

第 17 題

一、滿分參考答案：

$$\text{旋轉體體積 } V \text{ 為 } \int_{-1}^1 \pi(3ax^2 + 1 - a)^2 dx = \pi(9a^2 \frac{x^5}{5} + 2a(1-a)x^3 + (1-a)^2 x) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{5}\pi a^2 + 2\pi$$

，故 V 會隨 a 而改變，且在 $a=1$ 時有最大值 $\frac{18}{5}\pi$

二、評分原則：

滿分

1. 正確列出旋轉體體積 V 為 $\int_{-1}^1 \pi(3ax^2 + 1 - a)^2 dx$ 。

2. 正確求得旋轉體體積 V 為 $\frac{8}{5}\pi a^2 + 2\pi$ 。

3. 由 $\frac{8}{5}\pi a^2 + 2\pi$ 知 V 會隨 a 而改變，且在 $a=1$ 時有最大值 $\frac{18}{5}\pi$ 。

部分給分

上述解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。